МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Рубцовский индустриальный институт
(филиал) федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова»
(РИИ АлтГТУ)

А.С. ШЕВЧЕНКО

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Методические указания к выполнению контрольной работы
для студентов направлений подготовки «Экономика», «Менеджмент
организации» всех форм обучения

Рубцовск 2021

УДК 519.813

Шевченко А.С. Элементы теории оптимального управления: Методические указания к выполнению контрольной работы для студентов направлений подготовки «Экономика», «Менеджмент организации» всех форм обучения / А.С. Шевченко. – Рубцовск: РИИ, 2021. – 23 с. [ЭР].

Методические указания к выполнению контрольной работы по дисциплине «Элементы теории оптимального управления» содержат правила оформления контрольной работы и задания по изучаемым разделам: «Основы вариационного исчисления», «принцип максимума Понтрягина», «Методы динамического программирования».

.

Рассмотрены и одобрены на заседании кафедры прикладной математики Рубцовского индустриального института.
Протокол № 9 от 18.03.2021г.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания предназначены для изложения требований к выполнению контрольной работы по дисциплине «Элементы теории оптимального управления» для студентов всех форм обучения направлений подготовки 38.03.01 «Экономика», 38.03.02 «Менеджмент организации».

Контрольная работа – это один из видов самостоятельной работы студентов в вузе, направленный на выявление уровня усвоения учебного материала по определенной теме, конкретной учебной дисциплине за определенный период обучения.

Основные цели контрольной работы:

– систематизация, закрепление теоретических и практических знаний студентов по дисциплине;
– развитие навыков самостоятельной работы и овладение методикой исследования при решении конкретных научных и практических задач;
– развитие аналитического мышления и творческого подхода;
– применение системного подхода для решения поставленных задач.

Критериями оценки контрольной работы студента являются:

– уровень освоения студентом учебного материала (качество знаний);
– умение использовать теоретические знания в решении практических задач;
– аргументированность, полнота и логичность изложения решения заданий;
– обоснованность и четкость изложения решения заданий;
– оформление контрольной работы в соответствии с требованиями.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

При выполнении контрольной работы необходимо придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставлять поля шириной 1-2 см для замечаний преподавателя.

2. В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, номер группы, вариант контрольной работы – последняя цифра в зачетке, название дисциплины.

3. Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера заданий.

4. Перед решением каждого задания надо полностью выписать ее условие.

5. Решение задач должно содержать развернутые расчеты, объяснение полученных показателей, формулы, применяемые для решения задач. Формулы при этом приводятся в той записи, которая дана в учебнике или в лекционном курсе.

6. Контрольную работу студент обязан представить на кафедру не позднее установленного срока. Если в работе сделаны замечания преподавателем, студент обязан учесть их и внести необходимые исправления и дополнения.

1 ОСНОВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Задание 1.1. Найдите экстремали функционалов, зависящие от одной функции.

Функционалы по вариантам представлены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Вариационная задача с неподвижными границами

Номер варианта	Функционал
1	$\int_0^1 ((y')^2 - y)dx,\ y(0) = y(1) = 0;$
2	$\int_0^1 ((y')^2 + yx)dx,\ y(0) = y(1) = 0;$
3	$\int_0^1 ((y')^2 - yx^2)dx,\ y(0) = y(1) = 0;$
4	$\int_0^1 ((y')^2 + y'y + 12xy)dx,\ y(0) = y(1) = 0;$
5	$\int_{-1}^1 ((y')^2 + y^2)dx,\ \ y(-1) = y(1) = 1;$
6	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ((y')^2 - y^2 + 4y\cos x)dx,\ y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$
7	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ((y')^2 - y^2 - 4y\sin x)dx,\ \ y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$
8	$\int_0^1 ((y')^3 + 4(y')^2)dx,\ \ y(0) = 0,\ \ y(1) = -1;$
9	$\int_0^{\frac{3}{2}} ((y')^3 + 2y)dx,\ y(0) = 0,\ \ y\left(\frac{3}{2}\right) = 1;$
10	$\int_0^1 (y')^3 dx,\ y(0) = 0,\ \ y(1) = 1.$

Задание 1.2. Найдите экстремали функционала, зависящих от нескольких функций или, зависящих от производных высшего порядка одной функции.

Функционалы по вариантам представлены в таблице 1.2.

Таблица 1.2- Вариационная задача с неподвижными границами

Номер варианта	Функционал
1	$J\left[y\right]=\int_0^1\left[\left(y''\right)^2+1\right]dx,\ y\left(0\right)=0,\ y'\left(0\right)=1,\ y\left(1\right)=y'\left(1\right)=1;$
2	$J\left[y\right]=\int_0^1((y'')^2-48y+x)dx,\ y\left(0\right)=1,\ y'\left(0\right)=-4,\ y\left(1\right)=y'\left(1\right)=0;$
3	$J\left[y\right]=\int_0^1((y'')^2-24yx)dx,\ y\left(0\right)=y'(0)=0,\ y(1)=\frac{1}{5},\ y'(1)=1;$
4	$J\left[y_1,y_2\right]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y_1'y_2'-y_1y_2)dx,$ $y_1(0)=y_2(0)=0,\ y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1;$
5	$J\left[y_1,y_2\right]=\int_0^1(y_1'y_2'+6xy_2+12x^2y_2)dx,$ $y_1(0)=y_2(0)=0,\ y_1(1)=y_2(1)=1;$
6	$J\left[y_1,y_2\right]=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2y_1-4y_2^2+(y_2')^2-(y_1')^2)dx,$ $y_1(0)=0,\ y_1\left(\frac{\pi}{4}\right)=1,\ y_2(0)=0,\ y_2\left(\frac{\pi}{4}\right)=1;$
7	$J\left[y\right]=\int_0^1((y'')^2+y^2-2yx^2)dx,$ $y(0)=0,\ y(1)=1,\ y'(0)=0,\ y'(1)=1;$
8	$J\left[y\right]=\int_0^1(y''')^2dx,$ $y(0)=y'(0)=y''(0)=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=3,\ y''(1)=6;$
9	$J\left[y\right]=\int_0^1((y''')^2+(y'')^2)dx,$ $y(0)=y''(0)=0,\ y'(0)=1,\ \ y'(1)=ch1,\ \ y(1)=y''(1)=sh1;$
10	$J\left[y_1,y_2\right]=\int_0^1(y_1'y_2'+y_1y_2)dx,$ $y_1(0)=y_2(0)=1,\ y_1(1)=e,\ y_2(1)=4e;$

Задание 1.3. Найдите экстремали функционалов с подвижными границами.

Функционалы по вариантам представлены в таблице 1.3.

Таблица 1.3 – Вариационная задача с подвижными границами

Номер варианта	**Функционал**
1	$J[y]=\int\limits_0^1((y')^2+y)dx,\ y(1)=0;$
2	$J[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}((y'')^2-y^2)dx,\ y(0)=1;$
3	$J[y]=\int\limits_0^1((y')^2+xy)dx,\ y(1)=0;$
4	$J[y]=\int\limits_0^{x_1}((y')^2+y)dx,\ y(x_1)=x_1;$
5	$J[y]=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(y^2-(y')^2+4y\sin x)dx,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;$
6	$J[y]=\int\limits_0^{x_1}((y')^2+y^2)dx,\ y(x_1)=1-x_1;$
7	$J[y]=\int\limits_0^{x_1}((y')^2+y^2)dx,\ y(0)=0,\ x_1+y(x_1)+1=0;$
8	$J[y]=\int\limits_0^{x_1}(y')^3dx, y(0)=0,\ x_1+y(x_1)=1;$
9	$J[y]=\int\limits_0^{x_1}(y')^2dx\ ,\ y(0)=0,\ (x_1-1)y^2(x_1)+2=0;$
10	$J[y]=\int\limits_0^{x_1}(y')^2dx,\ y(0)=0,\ x_1+y(x_1)+1=0;$

Задание 1.4. Найдите экстремали изопериметрической задачи.
Изопериметрическая задача по вариантам представлена в таблице 1.4.

Таблица 1.4 – Изопериметрическая задача

Номер варианта	**Изопериметрическая задача**
1	$\int\limits_0^1(y')^2dx;\ \int\limits_0^1 ydx=0,\ \ y(0)=1,\ y(1)=0;$

Продолжение таблицы 1.4

2	$\int_0^{\pi}(y')^2dx;\ \int_0^{\pi} y\sin x dx=0,\ \ y(0)=0,\ (\pi)=1;$
3	$\int_0^{1}(y')^2dx;\ \int_0^{1} y^2dx=1,\ \ y(0)=y(1)=0;$
4	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}((y')^2-y^2)dx;\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\sin x dx=1,\ y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;$
5	$\int_0^{1}(y')^2dx;\ \int_0^{1} ydx=3,\ y(0)=1, y(1)=6;$
6	$\int_0^{1}(y')^2dx;\ \int_0^{1} yxdx=0,\ y(0)=-4, y(1)=4;$
7	$\int_0^{\pi} y\sin x dx;\ \int_0^{\pi}(y')^2dx=\frac{3\pi}{2},\ y(0)=0,\ \ y(\pi)=\pi;$
8	$\int_0^{2} x^3(y')^2dx;\ \int_1^{2} ydx=2,\ y(1)=4, y(2)=1;$
9	$\int_0^{\pi}((y')^2-y^2)dx;\ \int_0^{\pi} y\cos x dx=1,\ y(0)=y(\pi)=0;$
10	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}((y')^2-y^2)dx;\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\sin x dx=1,\ y(0)=y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

Задание 1.5. Найдите экстремали в задаче Больца.
Задача Больца по вариантам представлена в таблице 1.5.

Таблица 1.5 – Задача Больца

Номер варианта	Задача Больца
1	$J[y]=\int_0^1((y')^2-y)dx-\frac{y^2(1)}{2};$
2	$J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}((y')^2-y^2-2y)dx-2y^2(0)-y^2\left(\frac{\pi}{2}\right);$
3	$J[y]=\int_1^2 x^2(y')^2dx-2y(1)+y^2(2);$
4	$J[y]=\int_0^1(y')^2dx+4y^2(0)-5y^2(1)+y(1);$

Продолжение таблицы 1.5

5	$J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}((y')^2-y^2)dx+y^2(0)+y^2\left(\frac{\pi}{2}\right)-4y\left(\frac{\pi}{2}\right);$
6	$J[y]=\int_0^1((y')^2-y)dx+y^2(1);$
7	$J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}((y')^2-y^2-2y)dx-2y^2(0)-y^2\left(\frac{\pi}{2}\right);$
8	$J[y]=\int_0^1((y')^2+y)dx-2y^2(1),\quad y(0)=1;$
9	$J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}((y')^2-y^2-2y)dx-2y^2(0);$
10	$J[y]=\int_0^1((y')^2-y)dx+y^2(1);$

2 ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

1. Модель управляемой системы с тремя входами и двумя выходами имеет вид:

$$а)\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=f_1\left(x_1(t),x_2(t),u_1(t),u_2(t)\right),\\ \dfrac{dx_2}{dt}=f_2\left(x_1(t),x_2(t),u_1(t),u_2(t)\right);\end{cases}$$

$$б)\frac{dx}{dt}=f\left(x(t),u_1(t),u_2(t)\right);$$

$$в)\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=f_1\left(x_1(t),x_2(t),u_1(t),u_2(t),u_3(t)\right),\\ \dfrac{dx_2}{dt}=f_2\left(x_1(t),x_2(t),u_1(t),u_2(t),u_3(t)\right);\end{cases}$$

$$г)\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=f_1\left(x_1(t),x_2(t),x_3(t),u_1(t),u_2(t)\right),\\ \dfrac{dx_2}{dt}=f_1\left(x_1(t),x_2(t),x_3(t),u_1(t),u_2(t)\right),\\ \dfrac{dx_3}{dt}=f_3\left(x_1(t),x_2(t),x_3(t),u_1(t),u_2(t)\right);\end{cases}$$

2. Линейная нестационарная автономная система управления имеет вид:

$а)\dfrac{dx}{dt}=A(t)x(t)+b\left(u(t)\right)+\varphi(t);$ $б)\dfrac{dx}{dt}=Ax(t)+Bu(t);$

$в)\dfrac{dx}{dt}=A(t)x(t)+Bu(t);$ $г)\dfrac{dx}{dt}=f\left(x(t)\right)+B(t)u(t).$

3. Линейная стационарная система управления имеет вид:

$а)\dfrac{dx}{dt}=Ax(t)+Bu(t);$ $б)\dfrac{dx}{dt}=Ax(t)+bu^2(t);$

$в)\dfrac{dx}{dt}=Ax(t)+B(t)u(t);$ $г)\dfrac{dx}{dt}=Ax(t)+b\left(u(t)\right).$

4.Решение задачи Коши $\dfrac{dx}{dt}=Ax(t)+Bu(t),\ x(t_0)=x_0,\ t\in[t_0,t_1]$ можно найти по формуле:

$а)x(t)=\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau;$ $б)x(t)=e^{A(t-t_0)}x_0+\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau;$

$в)x(t)=e^{At}x_0+\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau;$ $г)x(t)=\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau;$

5. ЗОУ для линейной системы со свободным правым концом и ограничением на управление имеет вид:

а) $$\frac{dx}{dt}=Ax(t)+Bu(t),\quad x(t_0)=x_0,\quad u(t)\in U,\quad J(x,u)\to \min;$$

б) $$\frac{dx}{dt}=f(x(t))+Bu(t),\quad x(t_0)=x_0,\quad J(x,u)\to \min;$$

в) $$\frac{dx}{dt}=Ax(t)+Bu(t),\quad x(t_1)=x_1,\quad u(t)\in U,\quad J(x,u)\to \min;$$

г) $$\frac{dx}{dt}=f(x(t),u(t)),\quad x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1,\quad J(x,u)\to \min;$$

6. ЗОУ для нелинейной системы с закрепленными концами имеет вид:

а) $$\frac{dx}{dt}=f(x(t),u(t)),\quad x(t_0)=x_0,\quad J(x,u)\to \min;$$

б) $$\frac{dx}{dt}=Ax(t)+b(u(t)),\quad x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1,\quad u(t)\in U,\quad J(x,u)\to \min;$$

в) $$\frac{dx}{dt}=f(x(t))+Bu(t),\quad x(t_0)=x_0,\quad u(t)\in U,\quad J(x,u)\to \min;$$

г) $$\frac{dx}{dt}=f(x(t))+Bu(t),\quad x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1,\quad J(x,u)\to \min;$$

7. ЗОУ для линейной системы с фазовым ограничением и подвижными концами имеет вид:

а) $\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=A(t)x(t)+B(t)u(t),\\&x(t_0)\in X_0, x(t_1)\in X_1,\\&x(t)\ge 0,\\&J(x,u)\to \min;\end{aligned}$

б) $\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=Ax(t)+Bu(t),\\&x(t_0)\in X_0, x(t_1)\in X_1,\\&x(t)\ge 0,\\&J(x,u)\to \min;\end{aligned}$

в) $\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=A(t)x(t)+b(u(t)),\\&x(t_0)=x_0, x(t_1)=x_1,\\&x(t)\ge 0,\\&J(x,u)\to \min;\end{aligned}$

г) $\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=f(x(t))+b(u(t)),\\&x(t_0)\in X_0, x(t_1)\in X_1,\\&J(x,u)\to \min;\end{aligned}$

8.Задача терминального управления для линейной дискретной системы с фазовыми ограничениями имеет вид:

а) $\begin{aligned}&x(t+1)=Ax(t)+Bu(t), t=0,\ldots,T-1,\\&x(0)=x_0,\\&u(t)\in U,\\&J(x,u)=\varphi(x(T))\to \min;\end{aligned}$

б) $\begin{aligned}&x(t+1)=f(x(t),u(t)), t=0,\ldots,T-1,\\&x(\tau)=x_1,\\&g(x(t))\le 0,\\&J(x,u)=f(x(T))\to \min;\end{aligned}$

в) $\begin{aligned}&x(t+1)=Ax(t)+Bu(t), t=0,\ldots,T-1,\\&x(0)=x_0, x(t_1)=x_0,\\&x(t)\ge 0,\\&J(x,u)=L(x(T))\to \min;\end{aligned}$

г) $\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=Ax(t)+Bu(t), t\in[t_0,t_1],\\&x(0)=x_0,\\&x(t)\le 0,\\&J(x,u)=\varphi(x(t_1))\to \min;\end{aligned}$

9. ЗОУ для линейной системы с закрепленным правым концом и

терминальным критерием качества имеет вид:

а) $\frac{dx}{dt} = Ax(t) + b(u(t)),$ $x(t_0) = x_0,$ $J(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t),u(t)) \to \min;$

б) $\frac{dx}{dt} = Ax(t) + bu(t),$ $x(t_1) = x_1,$ $J(x,u) = \Phi(x(t_0), x(t_1)) \to \min;$

в) $\frac{dx}{dt} = A(x(t)) + Bu(t),$ $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1,$ $J(x,u) = \varphi(x(t_1)) \to \min;$

г) $\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t),$ $x(t_0) \in X_0, x(t_1) \in X_1,$ $J(x,u) = \varphi(x(t_1)) \to \min;$

10. Пусть X – объем выпуска в единицу времени, C – интенсивность потребления. Балансовое соотношение Леонтьева имеет вид:

а) $X = aX + b\frac{dX}{dt} + C;$ *б)* $X = \frac{a}{X} + b\frac{dX}{dt} + X;$

в) $aX = X - b\frac{dX}{dt} + C;$ *г)* $\frac{dX}{dt} = aX(t) + bX(t) + \frac{b(t)}{C(t)};$

11. Критерий качества в оптимизационной модели Леонтьева имеет вид:

а) $\alpha\int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta t} C(t)dt;$ *б)* $\alpha\int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta t} X(t)dt + \beta X(t_1);$

в) $\int_{t_0}^{t_1} (C(t) + X(t))dt;$ *г)* $\alpha\int_{t_0}^{t_1} e^{-\delta t} C(t)dt + \beta X(t_1);$

12. Пусть $K(t)$ – величина ОПФ в году *t*, $V(t)$ – интенсивность ввода новых ОПФ в отрасли. Модель роста ОПФ отрасли имеет вид:

а) $\frac{dK(t)}{dt} = -\mu K(t) + V(t);$ *б)* $\frac{dV}{dt} = -\mu V(t) + K(t);$

в) $\frac{dK(t)}{dt} = K(t) + \mu V(t);$ *г)* $\frac{dV}{dt} = -\mu K(t) + V(t);$

13. Сопряженная система для линейной стационарной системы имеет вид:

а) $\frac{d\psi}{dt} = A\psi(t) + Bu(t);$ *б)* $\frac{d\psi}{dt} = -A^T\psi(t);$

в) $\dfrac{dx}{dt} = A^T x(t)$; г) $\dfrac{d\psi}{dt} = A\psi(t)$;

14. Функционал Гамильтона для линейной стационарной системы имеет вид:

а) $H(x,u,\psi) = A\psi + Bu$; б) $H(x,u,\psi) = (\psi, Ax) + Bu$;

в) $H(x,u,\psi) = \psi(Ax + Bu)$; г) $H(x,u,\psi) = (\psi, Ax + Bu)$;

15. Определить функцию Гамильтона для ЗОУ

$$\frac{dx}{dt} = -x(t) + u(t), t \in [0,T],$$

$$x(0) = x_0,$$

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\int_0^T \left(x^2(t) + u^2(t)\right)dt + bx(T) \to \min$$

а) $\psi x + u - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{u^2}{2}$; б) $\psi(x-u) - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{u^2}{2}$;

в) $-\psi x + \psi u + x^2 + u^2$; г) $\psi(-x+u) - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{u^2}{2}$;

16. Записать сопряженное уравнение для ЗОУ

$$\frac{dx}{dt} = -x(t) + u(t), t \in [0,T],$$

$$x(0) = x_0,$$

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\int_0^T \left(x^2(t) + u^2(t)\right)dt + bx(T) \to \min$$

а) $\dfrac{dx}{dt} = x(t) - u(t)$; б) $\dfrac{d\psi}{dt} = -\psi(t) - x(t)$;

в) $\dfrac{d\psi}{dt} = \psi(t) + x(t)$; г) $\dfrac{d\psi}{dt} = x(t)$;

17. Краевая задача принципа максимума для ЗОУ

$$\frac{dx}{dt} = -x(t) + u(t), t \in [0,T],$$

$$x(0) = x_0,$$

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\int_0^T \left(x^2(t) + u^2(t)\right)dt + bx(T) \to \min,$$

имеет вид:

$$а)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x(t) + \psi(t), \\ \dfrac{d\psi}{dt} = \psi(t) + x(t), \\ x(0) = x_0, \psi(T) = -b; \end{cases} \qquad б)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(t) - \psi(t), \\ \dfrac{d\psi}{dt} = \psi(t) - x(t), \\ x(0) = x_0, \psi(T) = -b; \end{cases}$$

$$в)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x(t) + \psi(t), \\ \dfrac{d\psi}{dt} = \psi(t) + x(t), \\ x(0) = x_0, \psi(T) = 0; \end{cases} \qquad г)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(t) + \psi(t), \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -\psi(t) - x(t), \\ x(0) = x_0, \psi(T) = -b; \end{cases}$$

18. Определить функцию Гамильтона для ЗОУ

$$\frac{dx}{dt} = u(t), t \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0,$$

$$J(x,u) = \int_0^T x(t)\sin(t)dt \to \min.$$

$а)\psi x + \psi \sin(t);$ $\qquad б)\psi x + \psi u - x\sin(t);$

$в)\psi u - x\sin t;$ $\qquad г)\psi u + \psi \sin t;$

19. Найти сопряженное уравнение для ЗОУ

$$\frac{dx}{dt} = u(t), t \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0,$$

$$J(x,u) = \int_0^T x(t)\sin(t)dt \to \min.$$

$а)\dfrac{d\psi}{dt} = \cos t;$ $\qquad б)\dfrac{d\psi}{dt} = \sin t;$

$в)\dfrac{d\psi}{dt} = x(t) + \sin t;$ $\qquad г)\dfrac{d\psi}{dt} = x(t) + u(t);$

20. Определить условия трансверсальности для ЗОУ

$$\frac{dx}{dt} = u(t), t \in [0, T],$$
$$x(0) = x_0,$$
$$J(x,u) = \int_0^T x(t)\sin(t)dt \to \min.$$

а)$\psi(T) = 2;$ *б)*$\psi(T) = 0;$ *в)*$x(T) = 0;$

21. Найти зависимость оптимального управления $u(t)$ от сопряженной переменной в ЗОУ

$$\frac{dx}{dt} = -2x(t) + u(t), t \in [0,1],$$
$$x(0) = 1,$$
$$J(x,u) = \int_0^1 \left(x^2(t) + u^2(t)\right)dt \to \min$$

а)$u = \psi;$ *б)*$u = 2\psi;$ *в)*$u = \frac{\psi}{2};$ *г)*$u = \psi + 1;$

22. Найти зависимость оптимального управления $u(t)$ от сопряженной переменной в ЗОУ

$$\frac{dx}{dt} = x(t) + u(t), x(0) = 2, t \in [0,1],$$
$$J(x,u) = \int_0^1 \left(2x^2(t) + u^2(t)\right)dt \to \min$$

а)$u = -\psi;$ *б)*$u = \frac{\psi}{2};$ *в)*$u = -\frac{\psi}{2};$ *г)*$u = 3\psi;$

23. Найти зависимость оптимального управления $u(t)$ от сопряженной переменной в ЗОУ

$$\frac{dx}{dt} = x(t) + 3u(t), x(0) = 0, t \in [0,2],$$
$$J(x,u) = \int_0^2 \left(4x(t) + u^2(t)\right)dt + 2x(2) \to \min$$

а)$u = \frac{\psi}{2};$ *б)*$u = \frac{3}{2}\psi;$ *в)*$u = \psi - 1;$ *г)*$u = \psi;$

3 МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задание 3.1. Рассчитывается план поставок сырья на 4 месяца. Потребности сырья по месяцам планового периода и запас на складах на начало планового периода по вариантам заданы в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Вариант	**Потребность сырья по месяцам планового периода (единиц).**				**Запас на складах на начало планового периода**
1	100	50	150	100	0
2	100	100	50	150	50
3	50	150	100	100	100
4	50	100	150	100	150
5	100	150	50	100	200
6	100	150	100	50	250
7	150	100	100	50	300
8	100	100	150	50	50
9	100	50	150	100	150
10	50	100	100	150	200

Затраты на пополнение запасов $P(x)$ и затраты на хранение сырья на складах $\varphi(y)$ по вариантам заданы в таблице 3.2.

Таблица 3.2

Параметр			**Вариант**									
			1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
X	0	$P(x)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	25		52	64	47	58	60	50	55	49	70	66
	50		48	52	44	54	56	48	52	48	65	62
	75		44	48	41	52	54	45	48	44	60	58
	100		41	44	40	48	50	41	46	40	56	52
	125		36	40	36	46	47	39	42	36	54	48
	150		33	36	32	42	42	37	36	32	50	44
	175		27	32	28	36	40	34	32	27	47	40
	200		24	27	22	32	35	30	28	24	42	36
	225		22	24	20	28	30	24	24	22	40	32
	250		21	22	20	24	27	22	22	22	35	30
	275		20	22	18	22	24	19	22	20	30	25
	300		20	20	16	22	21	18	20	17	27	25

Продолжение таблицы 3.2

	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	25		3	4	2	7	10	12	8	5	2	7
	50		8	8	6	10	15	20	12	10	6	10
	75		16	18	10	16	18	24	20	18	10	16
	100		30	28	12	25	25	30	24	28	16	25
	125		35	32	20	30	30	35	30	32	25	30
Y	150	$\varphi(y)$	41	40	21	38	36	39	35	40	30	35
	175		41	41	29	44	42	47	39	42	38	41
	200		45	46	35	49	45	52	40	44	44	41
	225		50	46	40	52	50	60	41	44	49	45
	250		52	51	42	55	55	63	45	46	50	46
	275		53	53	44	57	60	69	48	50	55	50
	300		54	55	44	60	60	70	49	54	60	54
	325		58	56	46	61	65	72	50	56	60	58

Пополнение запаса производится партиями по 50 единиц. Складские помещения не позволяют хранить более 300 единиц сырья. К концу планового периода весь запас сырья должен быть израсходован в связи с переходом на новую продукцию.

Требуется организовать поставки и хранение сырья для производства продукции из условия минимизации общих затрат.

Задание 3.2. Для модернизации производства на 4-х предприятиях выделены денежные средства в размере 100 млн. ден. ед. По каждому из 4-х предприятий известен возможный прирост $q_i(x)$ $(i=\overline{1,\ 4})$ выпуска продукции в зависимости от выделенной ему суммы x.

Требуется:

1. Распределить средства в 100 млн. ден. ед. между предприятиями так, чтобы суммарный прирост выпуска продукции на всех 4-х предприятиях был максимальным.

2. Используя выполненное решение основной задачи найти оптимальное распределение 100 млн. ден. ед. между тремя предприятиями.

Исходные данные по вариантам приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3

Выделенные средства	$q_i(x)$	Вариант									
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
20	$q_1(x)$	9	9	7	9	9	11	12	14	16	12
40		18	17	29	20	18	21	26	24	28	28
60		24	29	37	35	29	40	40	37	36	39
80		38	38	41	44	41	54	60	45	49	47
100		50	47	59	57	60	62	72	58	60	69
20	$q_2(x)$	11	11	9	12	8	13	16	12	10	14
40		19	34	19	25	19	20	21	30	29	26
60		30	46	28	34	30	42	36	42	42	40
80		44	53	37	46	47	45	49	58	50	51
100		59	75	46	57	58	61	63	71	74	68
20	$q_3(x)$	16	13	17	11	12	10	9	13	15	11
40		32	28	27	20	25	22	17	25	27	24
60		40	37	37	32	51	34	35	45	46	43
80		57	49	48	48	58	55	51	62	58	51
100		70	61	66	61	69	60	65	70	65	68
20	$q_4(x)$	13	12	16	14	7	10	15	7	17	16
40		27	35	30	23	15	27	25	33	23	21
60		44	40	42	40	52	33	51	46	38	36
80		69	54	65	50	59	57	62	60	53	49
100		73	73	81	58	60	69	76	68	67	72

Задание 3.3. В начале планового периода продолжительностью N лет имеется оборудование возраста t. Известны стоимость $r(t)$ продукции, производимой в течение года с использованием этого оборудования; ежегодные расходы $u(t)$, связанные с эксплуатацией оборудования; его остаточная стоимость s; стоимость p нового оборудования (затраты на установку, наладку и запуск).

Требуется:

1. Пользуясь функциональными уравнениями составить матрицу максимальных прибылей $F_n(t)$ за N лет.

2. Сформировать по матрице максимальных прибылей оптимальные

стратегии замены оборудования данных возрастов t и t_1 лет в плановом периоде продолжительностью соответственно N и N_1 лет.

Исходные данные по вариантам приведены в таблице 3.4, 3.5.

Таблица 3.4

Параметр	**Вариант**									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
N	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
N_1	8	6	7	8	6	9	8	7	9	6
t	7	7	8	6	8	7	6	9	6	9
t_1	1	4	5	5	4	6	5	4	8	3
s	0	2	2	0	3	0	5	2	0	1
p	10	11	14	10	10	8	17	12	6	13

Таблица 3.5

Возраст оборудования, t	**Параметр**	**Вариант**									
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	$r(t)$	20	22	25	28	21	24	28	20	26	23
1		20	22	24	27	20	24	27	20	25	23
2		20	21	24	27	19	24	26	19	25	22
3		19	21	23	26	19	23	25	18	24	22
4		19	21	22	25	18	23	24	17	24	21
5		18	20	21	25	18	22	24	16	23	20
6		18	20	21	24	17	21	23	16	23	20
7		17	19	21	23	16	21	22	15	23	20
8		17	19	21	23	16	21	22	15	22	19
9		16	19	20	22	15	20	22	14	21	18
10		15	18	20	21	15	20	21	13	21	18

Продолжение таблицы 3.5

0		10	12	13	16	11	13	15	8	15	11
1		11	13	13	16	11	14	15	9	15	12
2		12	13	14	17	11	15	16	9	16	13
3		12	14	15	17	12	16	17	10	16	14
4		13	15	15	17	12	17	17	10	17	14
5	$u(t)$	13	15	16	18	13	17	18	10	17	15
6		14	16	16	18	13	17	19	11	18	16
7		14	16	17	19	13	18	20	11	19	17
8		15	17	18	20	14	19	20	12	19	17
9		15	18	19	20	14	19	21	13	20	17
10		15	18	20	21	15	20	21	13	21	18

Задание 3.4. Планируется деятельность двух предприятий в течение n лет. Начальные средства составляют s_0. Средства x, вложенные в предприятие *I*, приносят к концу года доход $f_1(x)$ и возвращаются в размере $\varphi_1(x) < x$; аналогично, средства x, вложенные в предприятие *II*, дают доход $f_2(x)$ и возвращаются в размере $\varphi_2(x) < x$. По истечении года все оставшиеся средства заново распределяются между предприятиями *I* и *II*, новых средств не поступает, и доход в производство не вкладывается.

Требуется найти оптимальный способ распределения имеющихся средств.

s_0=10000; n=4; $f_1(x) = 0.6x$, $f_2(x) = 0.N1x$; $\varphi_1(x) = 0,N2x$; $\varphi_2(x) = 0.N3x$, где N– последние цифры из зачетки или студенческой книжки (вместо нуля введите единицу).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ И РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдрахманов, В. Г. Элементы вариационного исчисления и оптимального управления. Теория, задачи, индивидуальные задания: учебное пособие / В. Г. Абдрахманов, А. В. Рабчук. – 2-е изд., испр. – Санкт-Петербург: Лань, 2014. – 112 с. – ISBN 978-5-8114-1630-1. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/45675 (дата обращения: 13.12.2020).

2. Бренерман, М.Х. Вариационное исчисление: учебное пособие / М.Х. Бренерман, В.А. Жихарев; Казанский национальный исследовательский технологический университет. – Казань : Казанский научно-исследовательский технологический университет (КНИТУ), 2017. – 148 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=500496 (дата обращения: 13.12.2020).

3. Васильев, Ф.П. Методы оптимизации: учебник / Ф.П. Васильев. – Изд. нов., перераб. и доп. – Москва: МЦНМО, 2011. – Ч. 1. Конечномерные задачи оптимизации. Принцип максимума. Динамическое программирование. – 620 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63313 (дата обращения: 13.12.2020).

4. Крутиков, В.Н. Методы оптимизации: учебное пособие: [16+] / В.Н. Крутиков, В.В. Мешечкин; Кемеровский государственный университет. – 2-е изд., исправ. и доп. – Кемерово : Кемеровский государственный университет, 2019. – 106 с.: ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=600281 (дата обращения: 13.12.2020).

5. Лагоша, Б.А. Оптимальное управление в экономике : учебное пособие / Б.А. Лагоша. – Москва: Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, 2004. – 133 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=90665 (дата обращения: 13.12.2020).

6. Окулов, С. М. Динамическое программирование: учебное пособие / С. М. Окулов, О. А. Пестов. – 3-е изд. – Москва: Лаборатория знаний, 2020. — 299 с. – ISBN 978-5-00101-683-0. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/135554 (дата обращения: 13.12.2020).

7. Самков, Т.Л. Математические методы исследования экономики и математическое программирование: учебное пособие: [16+] / Т.Л. Самков; Новосибирский государственный технический университет. – Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2018. – 115 с. : ил., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=575280 (дата обращения: 13.12.2020).